Om

de almindelige Naturkræfter

og

deres gjensidige Afhængighed.

Af

L. A. Colding,

Vandinspecteur.

Mine tidligere Arbeider over dette Æmne ere af det höitærede Selskab blevne saa gunstigt optagne, at dette giver mig Mod til her atter at forelægge Selskabet nogle Undersögelser, der grunde sig paa det tidligere af mig fremsatte Princip for de tabte Virksomheder; og det er mig saameget mere kjært at have erholdt Opfordring til at fortsætte mine Undersögelser, der have forskaffet mig mangen en behagelig Adspredelse imellem mine övrige Forretninger, som jeg nærer den Overbeviisning, at det Fölgende vil indeholde et Grundlag for en Række af Undersögelser, som maaskee i flere Punkter ikke ville være uden Interesse.

Som det vil erindres, har jeg i det Foregaaende deels henviist til den inderlige Forbindelse, hvori de forskjellige Naturkræfter vise sig at staae til hinanden, deels har jeg sögt at vise efter hvilken almindelig Lov de forskjellige Naturkræfter kunne udvikles af hinanden, og Rigtigheden af den deri fremsatte Grundtanke er bleven bekræftet ved Forsög, som jeg har udfört over den Varme, som udvikles ved faste Legemers Gnidning.

Jeg kan herved ikke tilbageholde den Bemærkning, at medens det er de forskjellige Naturkræfter, der ere bundne til Materiens Dele, som bestandig har bevirket og bestandig vil bevirke den uophörlige Udvikling af den uendelige Mangfoldighed af forskjellige Legemer, som Naturen til enhver Tid frembyder, og medens det ligeledes er disse Kræfter, som give de forskjellige Legemer deres eiendommelige, særegne Præg, saa er det ogsaa disses Vexelvirkning, som foranlediger den uophörlige Forandring, der egentlig kan betragtes som det Materielles Særkjende. Men en sædvanlig Betragtning af Naturens forskjellige Virksomheder, maa aabenbart före til den Tanke, at ogsaa disse frembringes og udvikles for igjen at forsvinde efter at have udfört en eller anden Virkning paa de materielle Dele; thi for det Förste er det bekjendt, at enhver Virksomhed, saasom Varmevirksomhed, mechanisk Virksomhed, electrisk Virksomhed o. s. v. har den Evne at kunne frembringe alle disse Kræfter, og dernæst veed man ogsaa, at naar man frembringer mechaniske Arbeidsmængder, Varmemængder o. s. v., ved givne Arbeidsmængder, Varmemængder o. s. v. saa forsvinde disse Virksomheder efterhaanden som de nye frembringes. At Varmes Frembringelse ved Varme, eller mechaniske Arbeidsmængders Frembringelse ved mechaniske Arbeidsmængder etc., egentlig kun er en Meddelelse af

Virksomheden fra et System af materielle Dele til et andet og ikke nogen ny Frembringelse, ligesom ogsaa, at det meddelte Legeme i det Höieste da kun kan erholde en Tilvæxt i Virksomhed af samme Störrelse, som den det meddelende Legeme taber, dette er almindelige anerkjendte Sandheder; derimod har det hidindtil været uklart, hvorledes Forholdet i Almindelighed er imellem de virkende og de frembragte Kræfter, da man meget mere er bleven staaende ved den dunkle Betragtning, at Virksomhederne have udfört deres Rolle, naar visse materielle Resultater ere frembragte. Saaledes for Exempel, naar den i en faldende Vandmængde indeholdte mechaniske Virksomhed, ved at forplante sig igjennem et Vandhjul, driver en Saugmölle, saa frembringer den i hvert Öieblik et vist materielt Resultat, men den tilsvarende mechaniske Virksomhed selv er tabt. Eller, naar den ved Steenkullenes Forbrænding under en Dampkjedel udviklede Varme, formedelst en Dampmaskine, sætter en Kornmölle i Bevægelse, saa frembringer Varmen ligeledes i hvert Öieblik et bestemt materielt Resultat, hvorved Tanken almindeligt standser, men Varmevirksomheden, som har frembragt dette Resultat, er der ikke mere, man siger den er bleven latent. Ligeledes, naar den ved chemiske Kræfter frembragte electriske Ström, ved Hjælp af en electromagnetisk Maskine, udförer et vist Arbeide, saa forsvinder Virksomheden under Arbeidet o. s. v. At der ved Siden af de udförte materielle Arbeider udvikles nye Kræfter, saasom Varme, Electricitet er vel bekjendt, men dette ansees almindeligt mere som en Biting. Denne Betragtningsmaade har stedse forekommet mig i höieste Grad uhyggelig, og jeg har derfor ingensinde kunnet hengive mig til en saadan Tanke. Det ene naturlige forekommer mig tvertimod at være det, som jeg tidligere har udviklet, nemlig: *At Kræfterne ingensinde kunne forsvinde i det Legemlige, og at det fölgelig maa være en almindelig Naturlov, at Kræfterne, uden Undtagelse, kun undergaae en Formforandring, naar de synes at forsvinde, og fremtræde derpaa igjen som virkende Aarsager i samme Störrelse, men i forandrede Former* *).

Jeg har her, ligesom tidligere, brugt Udtrykket „Virksomhed", fordi dette forekommer mig, efter Ordets Betydning ligefrem at angive, at Talen er om de Kræfter, der ere tilstede og udgjöre Væsenet i en hvilkensomhelst Bevægelse af et Antal materielle Dele. Med Ordet „Virksomhed" vil jeg saaledes i Almindelighed betegne det hele Indbegreb af Bevægelse, eller med andre Ord, det hele Liv, som den oprindelige tilstedeværende Aarsag til Bevægelse har fremkaldt imellem de materielle Dele og som altsaa er Et med Aarsagen selv. Udtrykket „den tabte Virksomhed" maa fölgelig ikke forvexles med det, som i D'Alemberts Princip betegnes ved de tabte Kræfter; thi i D'Alemberts Princip er der kun Tale om en Ligevægt imellem Kraftyttringer, saa at disse ingen videre

*) Man sammenligne hermed: Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel von Dr. J. R. Mayer. Heilbronn 1845. og Helmholtz Ueber bie Erhaltung der Kraft. Berlin 1847.

Virkninger kunne frembringe, men ikke om en Tilintetgjörelse af en alt tilstedeværende Virksomhed, dette Ord taget i den ovenfor angivne Betydning.

Er den fremsatte Sætning rigtig, saa er det klart af sig selv: *At de forskjellige Arter af Virksomhed, saasom Varmevirksomhed, mechanisk Virksomhed, den ved chemiske Kræfters Vexelvirkning frembragte Virksomhed o. s. v. i deres Væsen ikke kunne være forskjellige, men at alle de forskjellige Arter maa kunne henföres til een og samme Virksomhed, saasom til den mechaniske.*

Da Varmen bestaaer i en Bevægelse af Legemernes materielle Dele, saa fölger deraf ligefrem:

1. *At de materielle Dele, hvoraf et Legeme bestaaer, ere i en uophörlig Bevægelse selv naar Legemets Dele synes i den fuldkomneste Hvile, og*
2. *At man ved Undersögelser over de indre Bevægelser, som Delene af et Legeme ere underkastede, ikke behöver at betragte Varmen som en egen Kraft, men meget mere maa betragte den som et Resultat af de forhaandenværende Tiltrækninger og Frastödninger i Forbindelse med visse til Legemets Dele meddelte Bevægelsesmængder.*

Angaaende de Tilstande, hvori de materielle Dele af et Legeme befinde sig, da forekommer det mig, at man med Davy nærmest ledes til at antage, at Legemets mindste og elementære Dele, ifölge deres Natur besidde en bestemt electrisk Kraft, hvormed de virke tiltrækkende eller frastödende paa de övrige materielle Dele af Legemet. Forholdet imellem Mængderne af de forskjellige Stoffer, der indeholdes i Legemet, tilligemed Antallet af forskjellige Stoffer og Störrelsen af deres electriske Kræfter, bestemme baade de enkelte Deles Ligevægtsstillinger i Forhold til de nærmest Omgivende, og de indre Grupperinger i Legemerne. Omkring disse Ligevægtsstillinger, som for hver enkelt Deel er bestemt ved de forhaandenværende Tiltrækninger og Frastödninger af alle övrige Dele, gjöre Delene uophörlige Svingninger formedelst den dem meddelte Bevægelsesmængde, og i denne Bevægelse bestaaer, efter min Mening, Legemets Varme, der altsaa, som enhver anden Bevægelse, paa Grund af Omstændighederne snart kan være större, snart mindre. Det er saaledes klart, at den indre Virksomhedsmængde i et Legeme vil foröges, deels naar Legemet tilföres en ny Mængde af Virksomhed, det være nu i Form af Varme, Electricitet etc. eller i Form af meddelt mechanisk Virksomhed fra et andet Legeme, deels naar de Kræfter foröges, hvormed Legemets Dele bevæges imellem hinanden. Virksomhedsmængden vil derimod formindskes, naar nogen Deel af den indeholdte Bevægelsesmængde afledes til andre Legemer, eller naar de Kræfter formindskes, hvormed Delene bevæges i Legemet.

Naar ingen Virksomhed tilföres eller afledes fra Legemet og de Kræfter, hvormed Legemets Dele bevæges imellem hinanden, ikke forandres, saa vil den i Legemet indeholdte Virksomhed bestandig blive den Samme.

Efter disse almindelige Bemærkninger kommer det nu an paa at bestemme det mathematiske Udtryk for den Virksomhed, som et Legeme indeholder. Denne Bestemmelse vil, ifölge det Foregaaende, ikke være vanskelig, da vi have seet at de forskjellige Arter af Virksomheder egentlig ikke ere forskjellige, men alle kunne henföres til een Virksomhed, for Exempel til den mechaniske.

Idet der saaledes her er Tale om i Almindelighed at bestemme det mathematiske Udtryk for en, imellem materielle Dele stedfindende mechanisk Virksomhed, eller hvad der er det samme, at bestemme det mathematiske Udtryk for det hele Indbegreb af Bevægelse, som en oprindelig tilstedeværende Aarsag til Bevægelse har fremkaldt mellem disse Dele, saa vil det maaske være vel at forudskikke fölgende velbekjendte Exempel.

Naar en Vandmasse m befinder sig i Hvile i en Höide h over Jordoverfladen, og h ikke er större, end at man kan antage Tyngdekraften i Höiden h ligestor med Tyngdekraften g ved Jordoverfladen, saa er det en af Alle antagen og paa det mest fuldstændige beviist Sandhed, at det hele Indbegreb af Bevægelse, som formedelst den forhaandenværende Tyngdekraft, kan frembringes og meddeles for Exempel til et Vandhjul eller til nogen anden Maskine, vil være at udtrykke ved:

$$Q = m \,.\, g \,.\, h,$$

hvilken Virkning man dog altid kun vil kunne mere og mere nærme sig til, men aldrig vil kunne opnaae aldeles paa Grund af de stedse indtrædende Hindringer, saasom Luftmodstand, Gnidningsmodstand o. s. v. Da m . g er Vandmassens Vægt og h er Höiden, hvorigjennem Vandmassen tilstedes at falde, saa seer man, at naar m . g udtrykkes i Pund og h udtrykkes i Fod, saa bliver den mechaniske Virksomhed, der i Mechanikken almindeligt kaldes *Kraftens Nyttevirkning* eller *Arbeidsmængde*, at udtrykke i ℔ Fod, det er: i Pund hævet een Fod höit.

Det er fremdeles ligesaa velbekjendt og beviist, at naar man abstraherer fra alle Modstande, der i Virkeligheden ville indtræde, saa vil man opnaae nöiagtig den samme Arbeidsmængde enten Vandmassen bevæges lodret ned i Retning af Tyngden eller tvinges til at bevæge sig paa en hvilkensomhelst Flade eller efter en hvilkensomhelst Linie igjennem Höiden h, hvoraf ligefrem fölger: at Tilvæxten dQ i Arbeidsmængde, som udvikles ved Faldet igjennem hver lille Deel ds af Banen s, er lig m . g multipliceret med ds oplöst efter Kraftens Retning, det er:

$$dQ = m \,.\, g \,.\, \frac{dh}{ds} \,.\, ds \,.$$

Men det er let at indsee, at denne Formel bliver almindelig gjældende, selv om den accelererende Kraft g var en hvilkensomhelst variabel Störrelse g' og m en hvilkensomhelst Masse, eftersom g' stedse vil være constant i Tidselementet dt, hvori Baneelementet ds beskrives. Naar man altsaa sætter den accelererende Kraft oplöst efter Banen

$$g'.\frac{dh}{ds}=\varphi$$

og Hastigheden i Banen, efter Forlöbet af Tiden t, lig v, saa har man Virksomheds-tilvæxten almindeligt udtrykt ved:

$$dQ = m.\varphi.ds = m.\varphi.vdt.$$

Man seer tillige let, at Eenheden for denne Störrelse Q endnu er den samme som foran bemærket, nemlig: et Pund löftet en Fod.

Men betegnes de retvinklede Coordinater til det materielle Punkt ved x, y, z, og de accelererende Kræfter efter de tre coordinerte Axer ved X, Y, Z, saa har man som bekjendt:

$$\varphi = X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds},$$

som indsat i Ligningen ovenfor giver:

$$dQ = m\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)\frac{ds}{dt}.dt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hvoraf den i Tiden t frembragte Virksomhed findes, nemlig

$$Q = m\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)+C, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

idet C, er en arbitrair Constant.

Er Punktet derimod ikke fuldkommen frit, men underkastet hvilkesomhelst materielle Modstande, saasom Modstand af et Fluidum, Gnidningsmodstand etc., saa vil Virksomheds-Tilvæxten i Tiden dt kun blive

$$dw = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{dx}{ds}+\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{dy}{ds}+\frac{d^2z}{dt^2}.\frac{dz}{ds}\right)\frac{ds}{dt}.dt \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

hvoraf den Virksomhed, som Punktet virkelig indeholder efter Forlöbet af Tiden t findes, nemlig:

$$w = m.\frac{v^2}{2}+C_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

idet C_2 er en arbitrair Constant.

Maalet for denne Virksomhed er endnu som för: 1 Pund löftet 1 Fod höit, hvilket man let overbeviser sig om, naar man bemærker, at Virksomhedsmængden w ogsaa kunde have været erholdt ved at have ladet Massen m falde igjennem en saa stor Höide h i det lufttomme Rum, at Slutningshastigheden derved var bleven v, hvilken Faldhöide bestemmes af Ligningen

$$\frac{v^2}{2}=g.h, \text{ idet } g \text{ er Tyngdekraften.}$$

Indsættes denne Værdie for $\frac{v^2}{2}$ i Udtrykket for w, Formel (4), saa erholdes w ligefrem udtrykt i ℔ $^{\text{Fod}}$.

Den Virksomhed som det materielle Punkt taber under Bevægelsen i Tiden dt kan altsaa fremstilles ved:

$$dq = dQ - dw.$$

Men denne Virksomhed er ikkun tilsyneladende tabt naar den synes at forsvinde, den fremtræder paany, saafremt den fremsatte Grundsætning er rigtig, i sin oprindelige Störrelse blot under en anden Form. Den nye Virksomhed vil fölgelig være fremstillet ved:

$$dq = m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{ds} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{ds} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{ds}\right]\frac{ds}{dt}.dt \quad (5).$$

Denne Ligning, der let gives fölgende Form

$$dq = m\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt}\,dt + m\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{dt}\,dt + m\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}\,dt$$

viser forelöbig, at man erholder den hele nye Virksomhed, naar man tager Summen af de Virksomheder, som de accelererende Kræfter efter Axerne hver for sig ville frembringe.

Tænker man sig det materielle Punkt underkastet hvilkesomhelst Modstande, og betegnes Resultanten af alle disse ved R; da kan denne tænkes oplöst i to andre, nemlig i Modstanden i Retningen af Banen som jeg vil betegne ved P og i Modstanden lodret paa Banen, som jeg vil kalde $P_{,}$. Man har da, som bekjendt,

$$P = m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{ds} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{ds} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{ds}\right],$$

som indsat i Ligningen (5) giver

$$dq = P\left(\frac{ds}{dt}\right)dt,$$

hvoraf ved Integration erholdes:

$$q = \int P.\frac{ds}{dt}.dt + C, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

idet C er en arbitrair Constant.

Heraf fölger: at den nye frembragte Virksomhed kun afhænger af P eller Modstanden efter Banen, hvorimod den er uafhængig af $P_{,}$ eller Modstanden lodret paa Banen *).

---

*) Dette sidste Resultat kan maaske synes ikke at være væsentlig forskjelligt fra det der umiddelbart fremgaaer af Formlen (1), naar man blot betragter de forhaandenværende materielle Modstande efter de tre coordinerte Axer som virkelige Kræfter, der kunde tænkes medindbefattende i de accelererende Kræfter X, Y og Z; men deels er det klart, at det som da vilde være fremstillet ved Formlen (1) vilde være Tilvæxten til den Virksomhedsmængde, som det bevægede Legeme virkelig vilde erholde i Tiden t, altsaa det Samme som det der er udtrykt i Formlen (3), hvilket altsaa först maatte drages fra dQ for at give Tilvæxten til den tabte eller til den i ny Form fremtrædende Virksomhed dq, deels har jeg herved villet undgaae at man skulde tænke sig materielle Modstande som virkelige Kræfter;

Naar $X dx + Y dy + Z dz$ er et exact Differential, som jeg vil betegne ved $d . F(x, y, z)$, saa giver Formlen (5) ligefrem ved Integration

$$q = m . F(x, y, z) - \frac{m}{2} . v^2 + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Jeg vil, som et specielt Tilfælde, her kun betragte det, hvor Modstanden P i Retningen af Banen er constant, saaledes som Coulomb's Forsög have givet ved Frictionen af Metal glidende paa Metal; man erholder da, ifölge Formlen (6)

$$q = P . s,$$

naar q antages lig Nul for $s = o$.

Denne Ligning viser, at den nye frembragte Virksomhed er lig Productet af Frictionen og det gjennemlöbne Rum, saaledes som mine tidligere Forsög virkelig have givet, og at denne Virksomheds Störrelse er uafhængig af Hastigheden, hvormed Slæden bevæges, hvilket Resultat ogsaa fandtes ved Forsögene.

Virksomheden i et helt System af materielle Punkter.

Vi ville dernæst betragte Bevægelsen af et heelt System af materielle Punkter, hvis Masser vi ville betegne med m, m', m'', etc.

Efter Forlöbet af Tiden t være $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$, etc. Coordinaterne til Punkterne m, m', m'', etc. De accelererende Kræfter efter Axerne være for disse Punkter respective $X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z''$, etc., og Tilvæxterne til de Virksomheder, som disse Punkter afgive til de forhaandenværende materielle Modstande, være respective dq, dq', dq'' etc., saa har man ifölge Formlen (5)

$$dq = m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)dx + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)dy + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right]$$

$$dq' = m'\left[\left(X' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)dx' + \left(Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}\right)dy' + \left(Z' - \frac{d^2z'}{dt^2}\right)dz'\right]$$

$$dq'' = m''\left[\left(X'' - \frac{d^2x''}{dt^2}\right)dx'' + \left(Y'' - \frac{d^2y''}{dt^2}\right)dy'' + \left(Z'' - \frac{d^2z''}{dt^2}\right)dz''\right]$$

etc.

---

thi det forekommer mig, at de materielle Modstande ikke ere andet end saa at sige döde Ting, hvortil endeel af den virkelige Kraft, der er Resultanten af de tre Kræfter X, Y og Z i Formlen (1) oplöste efter Banen, under Bevægelsen af Massen m, meddeler sig. Endskjöndt det altsaa er ganske vist, at Formlen (6) kan betragtes som et simpelt Resultat af Formlen (1), hvorfra jeg er gaaet ud, saa tillader jeg mig dog at beholde denne Formel, saamegetmere som jeg ved den ovenfor udviklede Tankegang i sin Tid förste tilfulde indsaae det Heles sande Sammenhæng.

Adderes alle disse Ligninger og sættes $dq + dq' + dq'' + \dots = dq_{,}$, saa erholdes

$$dq_{,} = \Sigma m \left[\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) dx + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) dy + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) dz\right], \quad (8)$$

hvor altsaa $dq_{,}$ betegner den hele Virksomheds-Tilvæxt, som samtlige materielle Dele afgive til de materielle Modstande, og Σ antyder Summationen.

Naar ingen andre Modstande ere tilstede end de, som det betragtede System af materielle Punkter frembyde, saa har man

$$\Sigma\, m \left[\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) dx + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) dy + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) dz\right] = o,$$

som viser, at formedelst de indre Modstande taber Systemet ingen Virksomhed.

Den Virksomhed, som Systemet i Tiden t meddeler til de tilstedeværende materielle Modstande, kan, ifölge Formlen (8), udtrykkes ved

$$q_{,} = \Sigma\, m \int \left(Ydx + Ydy + Zdz\right) \div \Sigma \frac{m}{2} \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \text{Constant} \quad (9).$$

Sammenholdes det som Side 173 og 175 er udviklet, saa vil man indsee, at den hele indre Virksomhed, som et System af materielle Punkter indeholder, i alle Tilfælde vil være fremstillet ved

$$w = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, m \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + C, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

hvor C er en arbitrair Constant.

Heraf fölger, *at naar Virksomheden i et Legeme yttrer sig i Form af Varme, saa vil den indeholdte Varmemængde stedse være at udtrykke ved „den levende Kraft", som Legemets materielle Dele indeholde, idet man ved levende Kraft forstaaer det Halve af Summen af alle de materielle Deles Masser, hver multipliceret med Qvadratet af sin Hastighed.*

I en Note af „Ampère sur la Chaleur et sur la Lumières considérés commes resultant de mouvemens vibratoires" *) har Forfatteren fremsat den Tanke, at medens alle Lys og Varmestraaler skride frem ved Bölger igjennem Ætheren, saa beroer den ledede Varmes Forplantelse i Legemerne paa Atomvibrationer og deres Forplantelse fra Deel til Deel. Idet Forfatteren saaledes betragter Varmen som en Bevægelse af Atomerne, saa sammenligner han Varmemængderne, som Legemerne indeholde, med den levende Kraft af Atomerne, og gaaer derefter over til at vise, at de almindelige Ligninger for Varmens Forplantelse i et Legeme ogsaa maa gjælde for Forplantelsen af den levende Kraft. Da jeg nu i det Foregaaende troer at have beviist, at den i et Legeme indeholdte indre Virksomhed nödvendig er lig den levende Kraft, som Delene indeholde, saa fölger ogsaa

*) Annales de Chimie et de Physique T. LVIII. p. 432.

nödvendigt deraf, at det fremsatte Princip anvendt paa Varmens Forplantelse i Legemerne, langt fra at staae i Strid med Naturen, netop leder til de ved Erfaring beviste Sandheder.

Jeg vil nu gaae over til at undersöge, hvorledes den i et Fluidum indeholdte indre Virksomhedsmængde maa variere, naar Fluidets Tryk og Tæthed varierer.

Lad dm være et Element af en flydende Masse m, hvis Dele ifölge det Foregaaende maa forudsættes at være i en uophörlig indre Bevægelse; lad Coordinaterne til det betragtede Punkt af Massen efter Forlöbet af Tiden t være x, y, z, og Xdm, Ydm, Zdm, være de bevægende Kræfter af dm efter de tre retvinklede, coordinerte Axer; lad endvidere Tætheden i dette Öieblik for det betragtede Punkt af Massen m være ϱ, og lad p være Trykket paa Eenhed af Overflade; betegnes fremdeles Hastighederne af Elementet dm efter de tre coordinerte Axer ved

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

og sættes Tilvæxterne til disse Hastigheder i Tiden dt lig:

$$u' dt, \; v' dt, \; w' dt,$$

saa vil den mechaniske Virksomhedstilvæxt, som Elementet dm vilde have erholdt i Tiden dt, hvis det havde været fuldkommen frit, ifölge det Foregaaende, blive:

$$dm\,(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Men da Elementet dm ikke er fuldkommen frit, saa erholder det imidlertid i Virkeligheden kun en Tilvæxt, som kan fremstilles ved

$$dm\,(u'dx + v'dy + w'dz).$$

I Tidselementet dt taber altsaa dette Masse-Element en Deel af den mechaniske Virksomhed, som de tilstedeværende accelererende Kræfter virkelig frembringer. Betegnes den Virksomhed, som dm taber i Tiden t, ved $q.dm$, saa er den i Tidselementet dt tabte Virksomhed lig: $dq.dm$, og man har saaledes:

$$dq.dm = [(X - u')\,dx + (Y - v')\,dy + (Z - w')\,dz]\,dm \quad . \; . \; . \quad (11).$$

Men denne indre Virksomhed $dq.dm$, som Elementet dm i Tiden dt meddeler til de forhaandenværende materielle Modstande, kan let gives en simplere Form, idet man som bekjendt har

$$\left.\begin{aligned} dx\,dy\,dz\,.\,\frac{dp}{dx} &= (X - u')\,dm \\ dx\,dy\,dz\,.\,\frac{dp}{dy} &= (Y - v')\,dm \\ dx\,dy\,dz\,.\,\frac{dp}{dz} &= (Z - w')\,dm \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

,

thi adderes de tre Ligninger (12), efterat være multiplicerede respective med dx, dy, dz, og bemærkes dernæst, at

$$\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = dp,$$

saa seer man, at Formlen (11) ligefrem kan skrives:

$$dq \cdot dm = dx\, dy\, dz \cdot dp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Den i Tiden dt i Eenhed af Masse udviklede nye Virksomheds-Tilvæxt kan altsaa for det betragtede Punkt udtrykkes ved:

$$dq = \frac{dx\, dy\, dz}{dm} \cdot dp = \frac{1}{\varrho} \cdot dp, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

idet $dm = \varrho \cdot dx\, dy\, dz$.

Ved Hjælp af Formlen (14) vil man nu let være istand til at bestemme Störrelsen af den indre Virksomhed, som frembringes i en Masse-Eenhed af et flydende Legeme, naar dette sammentrykkes med en ydre Kraft; og da den derved frembragte indre Virksomhed i Hovedsagen yttrer sig i Form af Varmevirksomhed, saa vil man altsaa specielt være istand til at bestemme den Varmemængde, som frembringes ved flydende Legemers Sammentrykning.

Jeg skal i denne Henseende först henlede Opmærksomheden paa den Varmemængde, som frembringes i luftformige Legemer, naar disse underkastes Sammentrykning.

Antages at den betragtede Luftart i Tilstand af Ligevægt overalt har samme Tæthed D, og at h og gmh betegne Barometerhöiden og Lufttrykket, svarende til denne Tæthed, idet g er Tyngdekraften og m er Qviksölvets Tæthed. I et hvilketsomhelst Öieblik under Sammentrykningen ville vi fremdeles ved ϱ og p betegne Luftartens Tæthed og Tryk, man har da

$$\varrho = D\,(1 + s), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

hvor s eller Fortætningsgraden kan være positiv eller negativ.

Foregaaer Sammentrykningen saa hurtigt, at ingen Varme bortgaaer eller tilkommer under Bevægelsen, og s kun er en meget lille Störrelse, da er som bekjendt

$$p = gmh\,(1 + \gamma\, s), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

idet γ betegner Forholdet mellem den specifiske Varme ved constant Tryk og constant Volumen. Af denne Formel, hvis Nöiagtighed voxer i samme Grad som s formindskes, fölger:

$$dp = gmh \cdot \gamma \cdot ds,$$

og ved at indsætte denne Værdi for dp, tilligemed Udtrykket for ϱ af Formlen (15) i Ligningen (14), erholdes:

$$dq = \frac{gmh}{D} \cdot \gamma\, \frac{ds}{1 + s} \,.$$

Naar denne Ligning integreres, og man derhos bemærker, at s stedse forudsættes meget lille, saa erholdes uden mærkelig Feil

$$q = q_0 + \frac{gmh}{D} \cdot \gamma \cdot s, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

idet man antager $q = q_0$ for $s = o$.

Betegnes Temperaturen af Luftarten i dens oprindelige Ligevægtstilstand under Tætheden D ved T, og Temperaturen i det betragtede Öieblik under Sammentrykningen ved $(T + \theta)$, da har man som bekjendt, naar Luftens Udvidelsescoefficient er α,

$$p = \frac{gmh}{D} \varrho \frac{1 + \alpha (T + \theta)}{1 + \alpha T}.$$

Naar man heri indsætter Værdierne for ϱ og p, ifölge Formlerne (15) og (16), saa erholder man uden mærkelig Feil

$$s = \frac{\alpha \theta}{(1 + \alpha T)(\gamma - 1)},$$

som indsat i Formlen (17) giver:

$$q = q_0 + \frac{gmh \cdot \gamma \cdot \alpha\theta}{D(1 + \alpha T)(\gamma - 1)}.$$

Sættes Luftartens Tæthed ved 0°, under Trykket gmh, lig D_0, saa er

$$D(1 + \alpha T) = D_0,$$

og fölgelig har man

$$q = q_0 + \frac{gmh}{D_0} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \alpha\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Betegnes Hastigheden, hvormed q varierer i Forhold til Temperaturen, ved ω, som altsaa fremstiller den specifiske Varme af Fluidet ved foranderligt Volumen, saa har man

$$\omega = \frac{dq}{d\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Ved altsaa at differentiere Ligningen (18) med Hensyn til θ erholdes:

$$\omega = \frac{gmh}{D_0} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

og da dette Udtryk ikke forandres om man tænker sig s at være nok saa lille, saa indseer man, at Formlen (20) maa fremstille det nöiagtige Udtryk for den specifiske Varme ved foranderligt Volumen.

Naar man nu for en anden Luftart betegner den specifiske Varme ved foranderligt Volumen med ω', Tætheden ved Nul Grad under Trykket gmh ved D'_0 og Forholdet imellem denne Luftarts specifiske Varme ved constant Tryk (ɔ: ved foranderligt Volumen) og constant Volumen ved γ', saa finder man, idet Udvidelsescoefficienten α er den Samme for alle Luftarter:

$$\omega' = \frac{g\,m\,h}{D'_0} \cdot \frac{\gamma'}{\gamma' - 1} \cdot \alpha;$$

og ved derpaa at tage Forholdet imellem de specifiske Varmemængder for disse to Luftarter erholdes:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{D'_0}{D_0} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{\gamma' - 1}{\gamma'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

som netop er den Dulongske Formel, hvorefter den specifiske Varme for Luftarterne beregnes *).

I Korthed skal jeg tillade mig at anvende disse Formler paa at bestemme den Varmeudvikling, som finder Sted under Lydens Forplantelse i et luftformigt Legeme.

Ifölge Poisson har man nemlig, naar Lydens Hastighed er a,

$$a = \sqrt{\frac{g\,m\,h}{D} \cdot \gamma},$$

idet de foregaaende Betegnelser Side 178 bibeholdes; og naar det luftformige Legeme tænkes ubegrændset i alle Retninger om et fast Punkt, Coordinaternes Begyndelsespunkt, hvorfra Bölgebevægelsen udgaaer, og man ved Enden af Tiden t med r betegner Radius-Vector til det Punkt, hvis Coordinater ere x, y, z, da er Fortætningsgraden s i dette Punkt og i dette Öieblik bestemt ved Ligningen

$$s = \frac{1}{a\,r}\Big[F(r - a\,t) - f(r + a\,t)\Big],$$

idet F og f betegne tvende arbitraire Functioner; indsættes dette Udtryk for s i Ligningen (17), saa erholdes den udviklede Varmemængde

$$q = \frac{a}{r}\Big[F(r - a\,t) - f(r + a\,t)\Big] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Jeg skal dernæst henlede Opmærksomheden paa den Varmemængde, som udvikles ved draabeflydende Legemers Sammentrykning.

Det vil her være beqvemt at gaae ud fra de Forsög, som Conferentsraad Örsted har foretaget over Vædskers Sammentrykning. Ifölge disse Forsög kan det nemlig ansees som beviist, at naar en Vædske for een Atmosphæres Tryk sammentrykkes en Brök af Volumen lig β, da sammentrykkes denne Vædske 2β, 3β, 4β, etc. ved et Tryk af 2, 3, 4, etc. Atmosphærer.

Med Tilnærmelse kan man dernæst antage, ifölge Conferentsraad Örsteds senere Forsög over Varmeudviklingen ved Vandets Sammentrykning, at Varmeudviklingen er pro-

---

*) See Memoires de l'Academie royale des Sciences de l'institut de france T. X. p. 188.

portional med Trykket, saa at ved 2, 3, 4, etc. Atmosphærers Tryk udvikles ogsaa 2, 3, 4 etc. Gange saamegen Varme, som ved 1 Atmosphæres Tryk.

Betragtes altsaa en Masse-Eenhed af en vis Vædske, og antages dens Tæthed $= D'$ og dens Volumen $= V'$ under Temperaturen T', og sættes Trykket paa Eenhed af Overfladen $= gmh$; antages fremdeles, at Trykket forandres og bliver $= p'$, saa stiger Temperaturen til $(T' + \theta')$, Tætheden bliver ϱ' og Volumen bliver $V'_{,}$. Man har da

$$\varrho' = D' (1 + s'), \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

idet s' betegner Fortætningsgraden. Men da s' stedse er meget lille, saa har man ogsaa med tilstrækkelig Tilnærmelse

$$V'_{,} = V' (1 - s') \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Betegnes fremdeles Sammentrykningscoefficienten for een Atmosphæres Sammentrykning under Temperaturen T' med β, da er, ifölge Conferentsraad Örsteds Forsög,

$$\left.\begin{aligned} V'_{,} &= \left[1 - \left(\frac{p'}{gmh} - 1\right)\beta\right] V' \\ \theta' &= \left(\frac{p'}{gmh} - 1\right) . \varepsilon', \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

idet Lufttrykket gmh sættes lig een Atmosphære, og Temperaturudviklingen for een Atmosphæres Tryk betegnes ved ε'.

Oplöses begge Ligningerne (25) med Hensyn til p', og tages derved Hensyn til Formlen (24), saa erholdes

$$\left.\begin{aligned} p' &= gmh\left(1 + \frac{1}{\beta} . s'\right) \\ p' &= gmh\left(1 + \frac{\theta'}{\varepsilon'}\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

hvoraf fölger:

$$s' = \beta \frac{\theta'}{\varepsilon'},$$

som indsat i Ligningen (23) giver

$$\varrho' = D'\left(1 + \beta \frac{\theta'}{\varepsilon'}\right).$$

Differentieres den anden Ligning (26), erholdes

$$dp' = gmh . \frac{d\theta'}{\varepsilon'} .$$

Tilvæxten i Varmemængde som Legemet erholder, medens Trykket gaaer over fra p' til $p' + dp'$, bliver saaledes ifölge Formlen (14)

$$dq' = \frac{gmh}{D' . \beta} . d.\log\left(1 + \beta \frac{\theta'}{\varepsilon'}\right),$$

hvis Integral med tilstrækkelig Tilnærmelse kan skrives

$$q' = q_0' + \frac{g\,m\,h}{D'} \cdot \frac{\theta'}{\varepsilon'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

idet man antager $q' = q_0'$ for $\theta' = 0$.
Heraf fölger den specifiske Varme for Vædsken

$$\omega_{,} = \frac{g\,m\,h}{D'} \cdot \frac{1}{\varepsilon'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Sammenlignes den specifiske Varme for en Luftart, Formel (20), med den specifiske Varme for en Vædske, Formel (28), saa finder man

$$\frac{\omega}{\omega_{,}} = \frac{D'}{D_0} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \alpha\,\varepsilon',$$

eller naar Vædskens Tæthed ved Nul Grad betegnes ved D_0', saa er

$$D_0' = U \cdot D',$$

idet U er den bekjendte Function af Temperaturen T', som fremstiller Loven for Vædskens Udvidelse ved Varmen under constant Tryk. Paa Grund heraf kan ovenstaaende Ligning skrives

$$\frac{\omega}{\omega_{,}} = \frac{D_0'}{D_0} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{\alpha\,\varepsilon'}{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Antages nu, som et specielt Tilfælde, at den betragtede Luftart er atmosphærisk Luft, og at Vædsken er destilleret Vand, begge af Temperaturen 0°, da er

$$U = 1, \; \frac{\omega}{\omega'} = 0{,}2669, \; \frac{D_0}{D_0'} = 0{,}001299 \text{ og } \alpha = 0{,}00366;$$

fremdeles, ifölge de bedste Iagttagelser over Lydens Hastighed ved 15,9° C, er $\gamma = 1{,}407$. Naar disse Værdier indsættes og Ligningen oplöses med Hensyn til ε' saa finder man

$$\varepsilon' = \frac{1}{36{,}57} \text{ Grad Celsius},$$

hvilken Varmeudvikling stemmer særdeles nöie med den, som udledtes af nogle Forsög, som for et Par Aars Tid siden bleve anstillede af Conferentsraad Örsted over Vandets Sammentrykkelighed ved forskjellige Temperatur, og i hvilke Forsög jeg, efter Conferentsraadens Anmodning, selv har havt den Fornöielse at deeltage.

Sammenlignes de specifiske Varmemængder for tvende Vædsker under Temperaturen T', da haves ifölge Formlen (28)

$$\frac{\omega_{,}}{\omega_{,,}} = \frac{D''}{D'} \cdot \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

idet $\omega_{,}$, D', ε', som för, betegne den specifiske Varme, Tætheden og den ved een Atmosphæres Sammentrykning udviklede Varme for det ene Legeme, og $\omega_{,,}$, D'', ε'', betegne de med $\omega_{,}$, D', ε' analoge Störrelser for det andet af de betragtede to Fluider.

Ere $\omega_{,,}$, D'' og ε'' bekjendte for det ene Fluidum, hvilket for Exempel er Tilfælde ved destilleret Vand, hvor

$$\omega_{,,} = 1,\ D'' = 1 \text{ og } \varepsilon'' = \frac{1}{36{,}57},$$

samt ere for det andet Fluidum Störrelserne $\omega_{,}$ og D' bekjendte, saa tjener Formlen (30) til at bestemme den Varmegrad ε', som vil udvikles i dette Fluidum ved een Atmosphæres Sammentrykning. Man finder nemlig

$$\varepsilon' = \frac{1}{36{,}57 \,.\, D' \,.\, \omega_{,}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

For efterstaaende draabeflydende Legemer har jeg paa denne Maade bestemt den Varmegrad ε', der vilde udvikles, om disse Vædsker underkastedes een Atmosphæres Sammentrykning.

Fluidets Navn.	Tætheden	Den specifiske Varme.	Den beregnede Varmegrad ε'.
Destilleret Vand	1,000	1,000	$\left(\frac{1}{36{,}57}\right)^{\circ}$ Celsius
Svovlsyre	1,848	0,335	$\left(\frac{1}{22{,}64}\right)^{\circ}$ C
Alkohol	0,793	0,700	$\left(\frac{1}{20{,}30}\right)^{\circ}$ C
Oliven-Olie	0,915	0,504	$\left(\frac{1}{16{,}86}\right)^{\circ}$ C
Qviksölv	13,598	0,0333	$\left(\frac{1}{16{,}56}\right)^{\circ}$ C
Svovlkulstof	1,272	0,329	$\left(\frac{1}{15{,}30}\right)^{\circ}$ C
Brom	2,966	0,135	$\left(\frac{1}{14{,}64}\right)^{\circ}$ C
Svovlæther	0,715	0,550	$\left(\frac{1}{14{,}38}\right)^{\circ}$ C
Terpentinolie	0,872	0,426	$\left(\frac{1}{13{,}58}\right)^{\circ}$ C

Den Varmegrad som udvikles i en Vædske ved een Atmosphæres Sammentrykning vil i Almindelighed være en Function af Vædskens Temperatur. Betragtes f. Ex. det destillerede Vand, og antages dets specifiske Varme at være uforandret ved alle Temperaturer, saa har man, ifölge Formlen (28), ved Temperaturen T'

$$\omega_{,} = g\,m\,h\,\frac{1}{D' \,.\, \varepsilon'}\,, \text{ og ved Temperaturen } 0^{0}$$

$$\omega_{,} = g\,m\,h\,\frac{1}{D_0' \,.\, \varepsilon_0'}\,,$$

idet D_0' og ε_0' betegne Værdierne af D' og ε' for $T' = 0^0$.

Heraf fölger altsaa

$$\varepsilon' = \varepsilon_0' \,\frac{D'_0}{D'}\,,$$

hvoraf tillige sees, at ved Vandet er den udviklede Varmegrad saa lidt variabel, at den almindeligviis vil kunne betragtes som constant.

Ifölge Formlen (20) vil det dernæst ogsaa være let at bestemme Störrelsen af den mechaniske Virksomhed, der er Æqvivalent med Eenheden for Varmemængder, idet en Varme-Eenhed sættes lig 1 ℔ Vand opvarmet 1 Grad Celsius.

Denne Formel kan nemlig skrives:

$$\omega = g\,m\,h\,(\alpha\, V_0)\,\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,,$$

idet man bemærker, at naar man for den betragtede Masse-Eenhed af Luft betegner Volumen ved 0^0 under Trykket $g\,m\,h$ ved V_0, saa er

$$D_0\, V_0 = 1.$$

Men nu er

$$g\,m\,h = \frac{0{,}76^{m} \,.\, 13{,}598 \,.\, 62 \text{ ℔}}{1728}$$

og tages Luftmassen i et Pund Luft som Eenhed, da er

$$\alpha\, V_0 = \frac{0{,}00366 \,.\, 1728}{0{,}001299 \,.\, 62}\,,$$

tilmed er $\gamma = 1{,}407$ og $0{,}76^{\text{metre}} = 2{,}421$ Fod,

hvoraf fölger

$$\omega = 321{,}42 \text{ ℔}', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

som viser, *at naar en mechanisk Virksomhed, udtrykt ved* 1 ℔ *hævet til en Höide af* 321,42 *Fod, meddeles til et Pund Luft, saa vil Luftens indre Virksomhed foröges saaledes, at dens Varme maa stige een Grad Celsius.* Betegnes Vandets specifiske Varme ved $\omega_{,}$, da er ifölge De la Roche og Berard

$$\omega_{,} = \frac{\omega}{0{,}2669}\,,$$

hvoraf fölger, *at den mechaniske Virksomhed, der er ligestor med Varmevirksomheden i en Eenhed af Varmemængde*, er

$$\omega_{,} = 1204{,}3 \text{ ℔}' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

Dette Udtryk for Vandets specifiske Varme viser, at naar den Varmemængde, som er istand til at opvarme 1 ℔ Vand 1 Grad Celsius — den saakaldte Varme-Eenhed — benyttes paa den fordeelagtigste Maade til Frembringelse af en mechanisk Virksomhed, saa vil deraf kunne udvikles 1204,3 Arbeids-Eenheder, idet en Arbeids-Eenhed sættes lig 1 ℔ hævet til en Höide af 1 Fod; og omvendt, naar en Virksomhed lig 1204,3 Arbeids-Eenheder meddeles til de materielle Dele af et Legeme, saa vil den indre Virksomhed mellem Delene, naar denne yttrer sig som Varmevirksomhed, nöiagtig blive foröget med en Varme-Eenhed.

Sammenlignes dette Resultat med det som jeg tidligere har udledet af mine Forsög over den ved faste Legemers Gnidning frembragte Varme, hvorved jeg som Middeltal af Forsögene fandt een Varme-Eenhed lig 1185,4 Arbeids-Eenheder *), saa seer man, at dette Middeltal afviger lidt fra det som er fremstillet i (33), men at dette dog ikke er mere, end det var at vente af saa faa Forsög, som de jeg hidtil har havt Leilighed til at udföre **).

Vi have i det Foregaaende undersögt den Virksomhedsmængde, som frembringes i et Fluidum, naar dette underkastes Sammentrykning, og ville nu gaae over til at bestemme det almindelige Udtryk for Störrelsen af den Virksomhed, som et Fluidum indeholder ved en given Temperatur, Tryk og Tæthed.

Betegnes, ligesom i det Foregaaende Side 175, de materielle Punkter, hvoraf Fluidet bestaaer ved m, m′, m″, etc., Coordinaterne til disse ved x, y, z; x′, y′, z′; x″, y″, z″; etc., og de accelererende Kræfter, hvormed disse Punkter bevæges ved X, Y, Z; X′, Y′, Z′; X″, Y″, Z″; etc., samt antages at Fluidet efterhaanden afgiver en Deel af sin Virksomhed i Form af mechanisk Virksomhed til Frembringelsen af et vist Arbeide, saa kan den hele Mængde af Virksomhed, som Fluidet efter Forlöbet af Tiden t har tabt, ifölge Formlerne (9) og (10), fremstilles ved

$$q = \Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz) \div w + C, \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

idet $\Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz)$ betegner Summen af alle med $m \int (X dx + Y dy + Z dz)$ analoge Led, svarende til samtlige materielle Punkter m, m′, m″, etc., og w fremstiller den Virksomhed, som Fluidet virkelig indeholder.

Er Fluidet en Luftart, saa kunne vi, uden mærkelig Feil, udelade de Led af Formlen som hidröre fra Luftdelenes gjensidige Tiltrækninger, og Formlen kan altsaa skrives

$$q = C \div w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

*) See min förste Afhandling „Om de almindelige Naturkræfter og deres gjensidige Afhængighed.“ S. 146.

**) I den senere Tid ere Forsög herover udförte af Hr. J. P. Joule. Pogg. Ann. B. 73. S. 479.

Antages Luftmassen, hvormed der arbeides, lig μ, saa finder man ligefrem, ifölge Formlen (14), ved Differentiation af Ligningen (35)

$$\mu \frac{dp}{\varrho} = \div dw.$$

Men ifölge Mariottes og Gaylussacs Lov er ϱ en given Function af p og θ bestemt ved Ligningen

$$p = k\varrho(1 + \alpha\theta), \quad \ldots \quad (36)$$

idet θ er Temperaturen efter Celsius og α er Udvidelsescoefficienten for Luftarten, og k er Forholdet imellem Lufttrykket gmh og Tætheden D_0 ved Nul Grad. Man har altsaa

$$\mu k(1 + \alpha\theta) \frac{dp}{p} + dw = o,$$

hvis fuldstændige Integral er:

$$w = f(\theta) \div \mu k(1 + \alpha\theta) \log \frac{p}{p_0}, \quad \ldots \quad (37)$$

idet $f(\theta)$ fremstiller en arbitrair Function af θ, p_0 er et hvilketsomhelst constant Tryk, og log betegner den naturlige Lagarithme.

Formlen (37) *er netop den Samme, som Holtzmann har udledet for Vanddampe*), ved en lignende Fremgangsmaade, som den Clapeyron först har angivet**).*

Af denne Formel erholdes, som bekjendt, den specifiske Varme ved constant Tryk:

$$\omega = \frac{1}{\mu} f'(\theta) \div k\alpha \log \frac{p}{p_0} \quad \ldots \quad (38)$$

og den specifiske Varme ved constant Volumen bliver

$$\omega_2 = \frac{1}{\mu} f'(\theta) \div k\alpha \log \frac{p}{p_0} \div k\alpha, \quad \ldots \quad (39)$$

idet $f'(\theta)$ betegner Differentialcoefficienten af $f(\theta)$ med Hensyn til θ. Af Formlerne (38) og (39) lader Formlen (20) sig ligeledes let udlede.

Befinde Dampe sig i Maximum af Tæthed, og antages Varmemængden w, som den samme Masse Damp indeholder, at være constant, saa bliver Trykket, ifölge Formlen (37) alene Function af Temperaturen, nemlig:

$$\log \frac{p}{p_0} = \frac{f(\theta) - w}{\mu k(1 + \alpha\theta)}.$$

Naar man, i det Tilfælde hvor w er constant, tager det totale Differential af höire Side af Ligningen (37), saa maa dette være Nul; man maa altsaa have:

**) Pogg. Ann. d. Physik. Ergänzungsband II. S. 183.

**) Pogg. Ann. d. Physik. B. 59. S. 446.

$$\left(f'(\theta) - \mu k \alpha \log \frac{p}{p_0}\right) d\theta - \mu k (1 + \alpha\theta) \frac{dp}{p} = 0;$$

men ifölge Formlerne (20) og (38) er

$$f'(\theta) - \mu k \alpha \log \frac{p}{p_0} = \mu \frac{gmh}{D_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1} . \alpha,$$

som indsat ovenfor giver

$$\alpha . \frac{\gamma}{\gamma - 1} d\theta = (1 + \alpha\theta) \frac{dp}{p}; \text{ hvoraf följer:}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\alpha d\theta}{\frac{\gamma - 1}{\gamma}(1 + \alpha\theta)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40).$$

Denne Differentialligning for Vanddampes Spænding i Forhold til Temperaturen, naar Dampene befinde sig i Maximum af Tæthed, er netop den, som Baron Wrede tidligere har udledet, og da denne Formel i Doves Repertorium der Physik B. 7. S. 231. kritiseres som ikke exact, saa vil et directe Beviis for dens Rigtighed, under den Forudsætning at w er constant, her maaskee ikke være overflödig.

Ved Hjælp af Formlen (36) har, som bekjendt, Poisson beviist, at naar den Varmemængde, som et luftformigt Legeme indeholder, betegnes ved w, saa maa w være en saadan Function af p og ϱ, at den tilfredstiller Differentialligningen

$$\gamma . p \frac{dw}{dp} + \varrho \frac{dw}{d\varrho} = 0,$$

idet γ, p og ϱ have den foran angivne Betydning.
Men denne Ligning integreres, som bekjendt, ved at sætte

$$\varrho dp - \gamma p d\varrho = 0 \text{ og } dw = 0.$$

Betegnes nemlig Integralerne af disse to Ligninger respestive ved

$$M = a \text{ og } w = b,$$

idet de tænkes oplöste med Hensyn til de arbitraire Constanter a og b, saa veed man, at

$$M = F(w),$$

hvor F(w) betegner en arbitrair Function af w, fremstiller det fuldstændige Integral af den forelagte partielle Differentialligning.

Men for Dampe i Maximum af Tæthed forudsætte vi w, og altsaa ogsaa F(w) constant, altsaa M = Constant, hvoraf fölger, at for Dampe i Maximum af Tæthed er dM = 0, eller

$$\varrho dp - \gamma p \, d\varrho = 0, \text{ altsaa}$$

$$\frac{dp}{p} = \gamma . \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Sammenholdes denne Ligning med det logarithmiske Differential af Formlen (36), saa finder man

$$(\gamma - 1)\frac{d\,p}{p} = \gamma \frac{\alpha\, d\,\theta}{1 + \alpha\,\theta}\text{, hvoraf følger}$$

$$\frac{d\,p}{p} = \frac{\alpha\, d\,\theta}{\frac{\gamma - 1}{\gamma}(1 + \alpha\,\theta)}.$$

Dette forekommer mig saaledes paa een Gang at være et uomstödeligt Beviis for Gyldigheden af Baron Wredes Formel, og en Pröve paa Rigtigheden af det opstillede Princip.